MAPLE'ga uute mudelite otsingul

Kalle Kiiranen, Rein Saar

Vaatleme väljateoorias hästi tuntud lainevõrrandite süsteemi [1,2,3]

$$\left(\beta^{\mu}\partial_{\mu} - m\right)\psi = 0 \quad , \tag{1}$$

kus β_{μ}-d on teatud seoseid rahuldavad NxN-maatriksid ($\mu = 0,1,2,3$).
Süsteem (1) on invariantne homogeensete Lorentzi teisenduste suhtes, kui

$$\left[\beta_{\mu}, S_{\rho\sigma}\right] = i(g_{\mu\rho}\beta_{\sigma} - g_{\mu\sigma}\beta_{\rho}) \quad , \tag{2}$$

kus $S_{\mu\nu}$ on Lorentzi rühma generaatorid. Kui tähistame $R_i = -1/2\varepsilon_{ijk}S^{jk}$ -ga ruumipöörded ja $S_i = S^{0i}$-ga - nn. "buustid" $(i, j, k = 1,2,3)$, siis võib tingimused (2) kirjutada kujul:

$$\left.\begin{aligned} &\left[\left[\beta_0, S_3\right], S_3\right] + \beta_0 = 0 \\ &\left[\beta_0, R_i\right] = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3a}$$

ja

$$\beta_i = -i\left[\beta_0, S_i\right] \ . \tag{3b}$$

Seega, piisab kui vaadelda ainult β_0. Hästi on teada nende β – maatriksite 4-dimensionaalne (N=4) Diraci esitus algebraga ($\beta_{\mu} \equiv \gamma_{\mu}$)

$$S_{\rho\sigma} = 1/4(\gamma_{\rho}\gamma_{\sigma} - \gamma_{\sigma}\gamma_{\rho}) \ , \ \gamma_{\mu}\gamma_{\nu} + \gamma_{\nu}\gamma_{\mu} = 2g_{\mu\nu} \, , \tag{4}$$

Siis (1) ongi tuntud Diraci võrrand, mis kirjeldab spinniga ½ osakesi ja vastavaid antiosakesi. Vastavatel 4x4-maatriksitel on võimalikud mitmesugused esitused, milledest tuntumad on nn. standardesitus ja spiinoresitus. Viimasel juhul

$$\gamma^0 = \sigma^1 \otimes I = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix}, \gamma^k = -i\sigma^2 \otimes \sigma^k = \begin{bmatrix} 0 & -\sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{bmatrix}, \tag{5}$$

kus σ^k on Pauli maatriksid, I on ühikmaatriks, $\otimes$ aga tähistab maatriksite otsekorrutist. Füüsikalises mõttes on kõik need esitused samaväärsed, so. seotud omavahel unitaarteisendustega.

Vähem tuntud on 16-dimensionaalne Kemmer-Duffin-Petiau (KDP) esitus algebraga

$$S_{\rho\sigma} = \beta_{\rho}\beta_{\sigma} - \beta_{\sigma}\beta_{\rho} \, , \quad \beta_{\rho}\beta_{\mu}\beta_{\sigma} + \beta_{\sigma}\beta_{\mu}\beta_{\rho} = g_{\mu\rho}\beta_{\sigma} + g_{\mu\sigma}\beta_{\rho} \ , \tag{6}$$

mis vastab spinn 0 ja 1 juhule. Ka siin on võimalikud erinevad esitused, olenevalt generaatorite konkreetsest kujust.

Näiteks nn. otsekorrutise esituses (DP, direct product) on klassikaline avaldis

$$\beta^{\mu} = 1/2(\gamma^{\mu} \otimes I + I \otimes \gamma^{\mu}) \quad . \tag{7}$$

(või $\beta^{\mu} = 1/2(\gamma^{\mu} \otimes I - I \otimes \gamma^{\mu})$)

Sama maatriks nn. KDP-esituses on:

$$\beta^0_{KDP} = \begin{bmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&i&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&i&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&i&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{bmatrix} \qquad (8)$$

Vastavaid Kemmer-Duffini-(Petiau) võrrandeid tuntakse juba 1938.(1935.) aastast alates [4,5,6] ning neid on uuritud põhjalikult ka Füüsika Instituudis (vt. ülevaadet [7]). Kahjuks on seni piirdutud kujuga (7)(8).

Käesoleva artikli autorid leidsid tingimusi (3) rahuldavate maatrisite β kõige üldisemad avaldised. Selgus, et näiteks KDP-esituses on kõige üldisem $\beta^{\mathbf{0}}$ -maatriksi kuju :

$$\beta^0{}_{KDP} = \begin{bmatrix}
0&\xi_1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\xi_2\\
\xi_3&0&0&0&0&\xi_4&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&\xi_5&0&0&\xi_6&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&\xi_5&0&0&\xi_6&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&\xi_5&0&0&\xi_6&0&0&0&0\\
0&\xi_7&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\xi_8\\
0&0&\xi_9&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\xi_{10}&0&0&0\\
0&0&0&\xi_9&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\xi_{10}&0&0\\
0&0&0&0&\xi_9&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\xi_{10}&0\\
0&0&\xi_{11}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\xi_{12}&0&0&0\\
0&0&0&\xi_{11}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\xi_{12}&0&0\\
0&0&0&0&\xi_{11}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\xi_{12}&0\\
0&0&0&0&0&0&\xi_{13}&0&0&\xi_{14}&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&\xi_{13}&0&0&\xi_{14}&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&\xi_{13}&0&0&\xi_{14}&0&0&0&0\\
\xi_{15}&0&0&0&0&\xi_{16}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{bmatrix} \qquad (9)$$

$$\det\beta^0_{KDP} = -(\xi_9\xi_{12}-\xi_{10}\xi_{11})^3(\xi_6\xi_{13}-\xi_5\xi_{14})^3(\xi_3\xi_{16}-\xi_4\xi_{15})(\xi_1\xi_8-\xi_2\xi_7) \qquad (10)$$

Juba siit on näha kahte huvitavat asjaolu:

1.Erinevalt nn. klassikalisest kujust (8) siin üldiselt $\det\beta \neq 0$, st. on võimalik leida ka vastavad pöördmaatriksid.

2.Kui klassikalises kujus (8) on võimalik 16-dim. esitust taandada 1-, 5- ja 10-dim. esituste otsesummaks, siis üldisel juhul ei ole see enam võimalik.

Arvutasime vastavad suurused ka Gelfandi esituses (G) [8] ja otsekorrutise esituses (DP), samuti nende esitustevahelised unitaarteisendused kõige üldisemal kujul

$U = U(m,n,p,q,r,s)$, $V = V(t,u,v)$, $R_{MG} = UR_{DP}U^+$, $R_{KDP} = VR_{DP}V^+$, kus (11)
$U^+U = I$, $V^+V = I$, mistõttu $m^2 = n^2 = \mathbf{1}, s^2 + q^2 = \mathbf{1}, p^2 + r^2 = \mathbf{1}$ ja $t^2 = u^2 = v^2 = \mathbf{1}$.

Et suvaline 4x4-maatriks on avaldatav Diraci baasi $\Gamma_s = \left\{ I, \gamma_\mu, \gamma_5, \gamma_5\gamma_\mu, \sigma_{\mu\nu} \right\}$ lineaarkombinatsioonina, saab avaldise (7) asemel kirjutada:

$$\beta_\mu = \beta_\mu{}^1 + \beta_\mu{}^2 \text{ , kus}$$

$$\begin{aligned}
\beta_\mu{}^1 &= a_1(\gamma_\mu \otimes I) + b_1(\gamma_5\gamma_\mu \otimes \gamma_5) + c_1\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(\gamma^\nu \otimes \sigma^{\alpha\beta}) + d_1(\gamma^\nu \otimes \sigma_{\mu\nu}) + l_1(\gamma_5\gamma_\mu \otimes I) + \\
&\quad f_1(\gamma_\mu \otimes \gamma_5) + k_1\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(\gamma_5\gamma^\nu \otimes \sigma^{\alpha\beta}) + e_1(\gamma_5\gamma^\nu \otimes \sigma_{\mu\nu}) \\
\beta_\mu{}^2 &= a_2(I \otimes \gamma_\mu) + b_2(\gamma_5 \otimes \gamma_5\gamma_\mu) + c_2\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(\sigma^{\alpha\beta} \otimes \gamma^\nu) + d_2(\sigma_{\mu\nu} \otimes \gamma^\nu) + l_2(I \otimes \gamma_5\gamma_\mu) + \\
&\quad f_2(\gamma_5 \otimes \gamma_\mu) + k_2\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(\sigma^{\alpha\beta} \otimes \gamma_5\gamma^\nu) + e_2(\sigma_{\mu\nu} \otimes \gamma_5\gamma^\nu)
\end{aligned} \tag{12}$$

kus $a_1, a_2, \ldots\ldots, e_1, e_2$ on (esialgu suvalised) 16 parameetrit ning

$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \quad \sigma^{\mu\nu} = i/2\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right]$

$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ - täielikult antisümmeetriline ühiktensor.

On kerge veenduda et liikmed kordajatega a_i, b_i, c_i, d_i annavad vektori, liikmed kordajatega l_i, f_i, k_i, e_i aga pseudovektori, mis rikub, nagu teada, P-sümmeetriat.Teiselt poolt, kui $\beta^\mu(a_i, d_i, f_i, k_i)$, siis β^0 on hermiitiline (β^k- antihermiitiline), kui aga $\beta^\mu(l_i, e_i, b_i, c_i)$, siis on olukord vastupidi.

Sümmeetrilisel juhul, kui $a_1 = a_2 \equiv a, \ldots, e_1 = e_2 \equiv e$, siis $\det \beta = 0$. Omakorda viimase erijuhul $a = 1/2, b = c = d = l = f = k = e = 0$ saame klassikalise avaldise (7), mis ,nagu öeldud, rahuldab KDP algebrat (6). Osutub, et sama algebrat rahuldab ka $\beta^\mu(a,b,l,f)$, kui

$$\left.\begin{aligned} (a^2 - b^2) - (l^2 - f^2) &= 1/4 \\ af - bl &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Asümmeetrilisel juhul, kui $\beta_\mu(a_k, b_k, l_k, f_k), k = \mathbf{1}, \mathbf{2}$, rahuldavad β– maatriksid Diraci algebrat (4) , kui

$$\left.\begin{aligned} (a_k^2 - b_k^2) - (l_k^2 - f_k^2) &= 1 \\ a_k f_k - b_k l_k &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Sama avaldis $\beta_\mu(a_k, b_k, l_k, f_k), k = \mathbf{1}, \mathbf{2}$ rahuldab ka R.Saare, I.Otsa ja R.-K.Loide töös[9] väljapakutud algebrat

$$\beta_\rho(\beta_\mu\beta_\nu + \beta_\nu\beta_\mu)\beta_\sigma = 2g_{\mu\nu}\beta_\rho\beta_\sigma, \tag{15}$$

kuid sel juhul on 2 võimalust : juht (14) ja

$$\left.\begin{aligned} (a_k^2 - b_k^2) - (l_k^2 - f_k^2) &= 0 \\ a_k f_k - b_k l_k &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

On ilmne et see uus algebra on nõrgem kui Diraci algebra, st. jätab rohkem vabadusi.
Huvitav on see, et N=16 juht kirjeldab nii fermione kui bosoneid, sõltuvalt β -de algebrast. Sellele juhtisid tähelepanu juba 1961.a. H.Õiglane ja G.Kutuzova [10].

Milliseid võimalusi elementaarosakeste teooriate loomisel eespoolkirjeldatud β -de üldistused avavad, ei ole paraku veel selge. Nii nagu Maxwelli võrrandeid, on ka Yang-Millsi võrrandeid kirja pandud nn. spiinorkujul , kasutades KDP algebrat selle klassikalisel kujul [11]. Eespoolkirjeldatud üldistused jätavad tõenäoliselt rohkem mänguruumi nende uute mudelite otsinguil. Loomulikult ei saa sealjuures piirduda ainult lineaarsete võrranditega.

Peab ütlema et arvutused 16x16 maatriksitega on üks väga aeganõudev ja tüütu tegevus. Õnneks oli ühel autoritest (K.K.) võimalus kasutada Waterloo Maple Inc.(Kanada) matemaatikapaketti MAPLE V rel. 3, mistõttu arvutused, mis varem nõudsid nädal aega tugevat tööd, tegime nüüd ära paari tunniga. Tõsi, ka see pakett pole kaugeltki veel täiuslik. Meie tundsime kohe algul puudust maatriksite otsekorrutise tehtest, aga õnneks aitas hädast välja Tartu Ülikooli matemaatikaõppejõud Raul Roomeldi, kes vastava programmi umbes poole tunniga ära tegi. Tema 1995.a. oktoobrikuus geomeetriaseminaris peetud ettekandest MAPLE-i kohta saigi üks autoritest (K.K.) innustust selle kasutamiseks väljateooria võrrandite uurimisel. Kasutame siin meeldivat võimalust talle tänu avaldada. Näib, et on saabumas aeg, kus inimesele jääb inimlik (so. ülesannete püstitamine ja valikute tegemine), masinale aga masinlik (so. aeganõudvad standardsed arvutused).

Kasutatud kirjandus :

1.Corson,E.M. Introduction to Tensors,Spinors and Relativistic Wave Equations. Blackie, London,1953.

2.Õiglane, H., Kaasaegse teoreetilise füüsika põhikursus, II osa, Tartu, 1967.

3.Saar,R.,Ots,I.,Jershova,I. Proc.Estonian Acad.Sci.Phys.Math.,1994,**43**,2,87-95.

4.Petiau,G., C.R.Acad.Sci. 1935, **200,** 375 .

5.Duffin, R.J., Phys. Rev. 1938, **54**, 114.

6.Kemmer,N., Proc.Roy.Soc.,1939, **A173**, 91.

7.Lõhmus,J. Eesti TA Füüsika Instituudi uurimused, 1989,**64**,10-44.

.Гельфанд,И.М.,Минлос,Р.А.,Шапиро,З.Я. Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения. Москва,195 .

9.Saar,R.,Ots,I.,Loide,R.-K. Hadronic Journal,1994,**17**,N 3,287-306.

10.Кутузова Г.Б., Ыйглане Х.Х., Труды ИФА АН ЭССР, 1961,Но.16, 1- 9.

11.Okubo,S.,Tosa,Y.,Phys.Rev. 1979,**D20**,N2,462-473.